Aula 10

Cálculo funcional

Sejam E um esp. de Banach e $A \in B(E)$.

Observe que $A^n(\lambda - A)^{-1} = A^{n-1}(A - \lambda + \lambda)(\lambda - A)^{-1} =$

$$= \lambda A^{n-1}(\lambda - A)^{-1} - A^{n-1} = \lambda A^{n-2}(A - \lambda + \lambda)(\lambda - A)^{-1} - A^{n-1} =$$

$$= \lambda^2 A^{n-2}(\lambda - A)^{-1} - \lambda A^{n-2} - A^{n-1} = \dots =$$

$$= \lambda^n (\lambda - A)^{-1} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{n-1-j} A^j$$

Seja Γ uma curva simples, fechada, retificável, positivamente orientada t.q. $\sigma(A) \subset \mathrm{int}(\Gamma) \Rightarrow$

$$A^n = A^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A^n(\lambda - A)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_\Gamma \lambda^n (\lambda - A)^{-1} d\lambda + \underbrace{\int_\Gamma \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{n-1-j} A^j\right) d\lambda}_{=0 \text{ já que } \lambda^{n-1-j} \text{ é analítica}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^n (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \quad (1)$$

Agora seja $p(\lambda) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n \lambda^n$ um polinômio complexo

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} \quad p(A) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n A^n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma p(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (2)$$

A fórmula (2) oferece a idea da definição de $f(A)$.

Def 1 Por $\mathcal{F}(A)$ vamos denotar a família das funções analíticas numa vizinhança aberta de $\sigma(A)$, onde $A \in B(E)$.

Observação A visinhança não deve ser conexa. ②

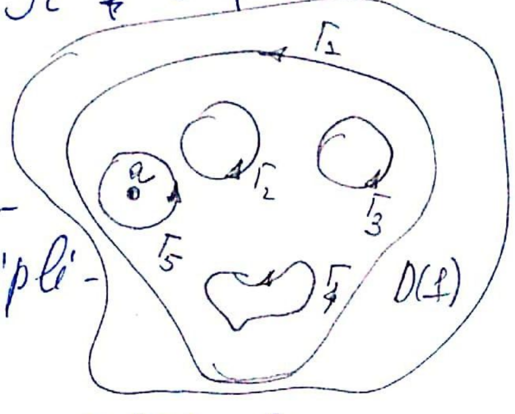
Def 2 Seja $f \in \mathcal{F}(A)$ e seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ tal que $\partial\Omega$ consiste do número finito das curvas simples, fechadas, positivamente orientadas e retificáveis. Suponha que $\Omega \supseteq \sigma(A)$ e $\overline{\Omega}$ está contido no domínio aberto de $D(f)$ de analiticidade de f $\Rightarrow$ $f(A)$ está definido por:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (3)$$

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{4} \Gamma_j \longrightarrow$$

Observação 1) Formula (3) é análogo da formula de Cauchy generalizada

(4) $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} d\lambda$, onde Ω e f são da Def 2.



(4) segue do Teorema de Cauchy-Goursat para os domínios multiplicamente conexos!

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} d\lambda = -\sum_{j=2}^{4} \int_{\Gamma_j} \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} d\lambda + \underbrace{\int_{\Gamma_5} \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} d\lambda}_{= 2\pi i \cdot f(a)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_j} \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} d\lambda}_{\int_{\partial\Omega} \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} d\lambda} = f(a)$$

2) $\|f(A)\| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} |f(\lambda)| \cdot \|(\lambda - A)^{-1}\| \, d\lambda \le$

$\le \frac{|\partial\Omega|}{2\pi} \sup_{\lambda\in\partial\Omega} \left(|f(\lambda)| \cdot \|(\lambda-A)^{-1}\| \right) = C(A, f, \partial\Omega)$.

domínio de analiticidade

3) Sejam $f, f_n \in \mathcal{F}(A)$, $D(f) = D(f_n)$ e $f_n \to f$ uniformemente nos subconjuntos compactos de $D(f) \Rightarrow f_n(A) \to f(A)$ em $B(E)$.

De fato, seja $\Omega \subset D(f)$ vizinhança aberta de $\sigma(A)$ da Def 2 $\Rightarrow \|f_n(A) - f(A)\| \le$

$\le \frac{|\partial\Omega|}{2\pi} \sup_{\lambda\in\partial\Omega} \|(\lambda-A)^{-1}\| \cdot \sup_{\lambda\in\partial\Omega} |f_n(\lambda) - f(\lambda)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Teorema 1 Sejam $f, g \in \mathcal{F}(A) \Rightarrow$

1) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$

2) $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$, $\alpha \in \mathbb{C}$

3) $(fg)(A) = f(A)\, g(A)$

4) $f(A)^* = f(A^*)$.

domínios de analiticidade

Demonstração Observe que em $D(f) \cap D(g)$

$(f+g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$, $(\alpha f)(\lambda) = \alpha f(\lambda)$, $(fg)(\lambda) = f(\lambda) \cdot g(\lambda)$. Obviamente, $f+g$, αf, $f \cdot g \in \mathcal{F}(A)$

$\Rightarrow$ 1), 2), onde $\Omega \subset D(f) \cap D(g)$.

(3)

3) Sejam Ω_1 e Ω_2 satisfazendo condições em Def 2 e tais que $\sigma(A) \subseteq \Omega_1 \subseteq \overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \overline{\Omega}_2 \subseteq D(f) \cap D(g)$

$$\Rightarrow f(A)\cdot g(A) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left(\int_{\partial\Omega_1} f(\lambda)(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda\right)\cdot\left(\int_{\partial\Omega_2} g(\mu)(\mu-A)^{-1}\,d\mu\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial\Omega_1}\int_{\partial\Omega_2} f(\lambda)g(\mu)(\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}\,d\mu\, d\lambda =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial\Omega_1}\int_{\partial\Omega_2} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}\left((\lambda-A)^{-1}-(\mu-A)^{-1}\right)d\mu\, d\lambda =$$

$= \eta_1 - \eta_2$, onde

$$\eta_1 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial\Omega_1}\int_{\partial\Omega_2} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda-A)^{-1}\,d\mu\, d\lambda =$$

formula integral de Cauchy

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_2}(\mu-\lambda)^{-1}g(\mu)\,d\mu\right) f(\lambda)(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_1} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda = (fg)(A) \text{ e}$$

$$\eta_2 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial\Omega_1}\int_{\partial\Omega_2} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(\mu-A)^{-1}\,d\mu\, d\lambda$$

para trocar integrais, pode usar continuidade de $f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(\mu-A)^{-1}$ em $\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial\Omega_2}\int_{\partial\Omega_1} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(\mu-A)^{-1}\,d\lambda\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_2}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_1}(\overset{\in\partial\Omega_2}{\mu}-\lambda)^{-1}f(\lambda)\,d\lambda}_{=0}\Bigg) g(\mu)(\mu-A)^{-1}\,d\mu = 0$$

Teorema de Cauchy

Finalmente, $f(A)\cdot g(A) = (fg)(A)$.

4) Lembre que $\sigma(A)=\sigma(A^*)$ e $\left((\lambda-A)^{-1}\right)^* = (\lambda-A^*)^{-1}$

Temos $f(A)^* = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda\right)^* =$ $(*)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)\left((\lambda - A)^{-1}\right)^* d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda - A^*)^{-1} d\lambda$$

$= f(A^*)$. O passo (*) segue da definição da integral como limite das somas de Riemann e a seguinte propriedade: $T_n, T \in B(E)$ e $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T \Rightarrow T^* = (\lim_{n\to\infty} T_n)^* = \lim_{n\to\infty} T_n^*$ (Já que $\|T^* - T_n^*\| = \|T - T_n\|$)

Lema 1 Seja $f(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \lambda^j$ para λ numa vizinhança aberta U de $\sigma(A)$, onde $A \in B(E)$.
Então $f \in \mathcal{F}(A)$ e $f(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j A^j$ em $B(A)$.

Demonstração Seja ρ o raio de convergência da série $\Rightarrow U \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \rho\} \Rightarrow f$ é analítica em $U \Rightarrow f \in \mathcal{F}(A)$. Suponha que $\Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq U$ satisfaz condições da Def 2 $\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \lambda^j$ converge uniformemente em $\bar{\Omega}$

$$\Rightarrow \|f(A) - \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j A^j}_{S_n(A)}\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} (f(\lambda) - S_n(\lambda))(\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|$$

$$\leq \frac{|\partial\Omega|}{2\pi} \sup_{\lambda\in\partial\Omega} |f(\lambda) - S_n(\lambda)| \sup_{\lambda\in\partial\Omega} \|(\lambda - A)^{-1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Observação Basta usar Obs 3) abaixo da Def 2.

Teorema 2 Se $f \in \mathcal{F}(A) \Rightarrow$

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} := f(\sigma(A))$$

(Teorema do mapeamento espectral)

Demonstração Suponha que f é analítica (6)
na vizinhança aberta U de $\sigma(A)$. Seja $\lambda_0 \in \sigma(A)$
e define

$$g(z) = \begin{cases} (z-\lambda_0)^{-1}(f(z)-f(\lambda_0)), & \lambda_0 \neq z \in U \\ f'(\lambda_0), & z = \lambda_0 \end{cases}$$

Obviamente, $g \in \mathcal{F}(A)$ e

$$f(z) - f(\lambda_0) = (z-\lambda_0)g(z) = g(z)(z-\lambda_0), \quad z \in U \quad (5)$$

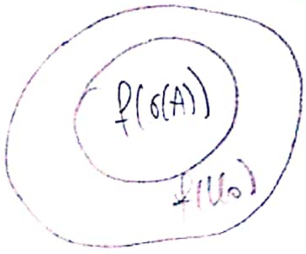
Combinando (5) com Teorema 1, obtemos

$$f(A) - f(\lambda_0)I = (A-\lambda_0 I)g(A) = g(A)(A-\lambda_0 I).$$

Já que $\lambda_0 \in \sigma(A)$, operador $A-\lambda_0$ é não inversível
$\Rightarrow f(\lambda_0) \in \sigma(f(A)) \Rightarrow f(\sigma(A)) \subseteq \sigma(f(A))$

Mostremos que $\sigma(f(A)) \subseteq f(\sigma(A))$ ou seja
$\mathbb{C} \setminus \sigma(f(A)) \supseteq \mathbb{C} \setminus f(\sigma(A))$.

Seja $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma(A)) \Rightarrow$ existe vizinhança aberta U_0
de $\sigma(A)$ tal que $U_0 \subset U$ e $f(z) - \beta \neq 0$, $z \in U_0$.



$\cdot\, \beta \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma(A))$

Define $h(z) = (f(z)-\beta)^{-1}$, $z \in U_0 \Rightarrow h \in \mathcal{F}(A)$ e

$$h(z)(f(z)-\beta) = 1 = (f(z)-\beta)h(z), \quad z \in U_0$$

$\Rightarrow$ do Teorema 1 segue $h(A)(f(A)-\lambda_0 I) = I = (f(A)-\lambda_0 I)h(A)$.
$\Rightarrow f(A)-\lambda_0$ é inversível (Já que é bijetor)
$\Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(f(A)) \Rightarrow f(\sigma(A)) \supseteq \sigma(f(A))$.

Equação diferencial $y' = Ay$

Sejam E um esp. de Banach e $A \in B(E)$

Consideremos $y'(t) = A\,y(t)$, $t \in [0,\infty)$ (6)

A função $y : [0,\infty) \to E$ é dita uma solução de (6) se y for contínua em $[0,\infty)$ e $\lim_{h\to 0} \| Ay(t) - \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t))\| = 0$ $\forall\, t > 0$. Analogamente ao caso escalar, idea é mostrar que soluções de (6) tem forma $y(t) = e^{tA}x$, $x \in E$, onde

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda,$$ onde Γ é uma curva simples, fechada, rectificavel, posit. orientada com $\operatorname{int}(\Gamma) \supset \sigma(A)$.

Aplicando Lema 1, obtemos $e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$

Lema 3 A função $\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{tA} \in B(E)$ é derivável e

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}.$$

Demonstração Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ fixo e $h \neq 0$ tal que $|h|\,\|A\| \le \frac{1}{2}$. Observe que $e^{(t_0+h)A} = e^{hA}e^{t_0A}$ (Teorema 1,3)

$$\Rightarrow \left\| \frac{1}{h}\left\{e^{(t_0+h)A} - e^{t_0A}\right\} - Ae^{t_0A}\right\| \le \left\|\frac{1}{h}\left\{e^{hA} - I\right\} - A\right\| \cdot \|e^{t_0A}\|$$

$$= \left\|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}h^{j-1}A^j\right\| \cdot \|e^{t_0A}\| \le |h| \cdot \|e^{t_0A}\| \left(\sum_{j=2}^{\infty}|h|^{j-2}\|A\|^j\right)$$

$$\le 2|h| \cdot \|e^{t_0A}\| \cdot \|A\|^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Teorema 3 O problema do valor inicial

$$(7)\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \in [0,\infty) \\ y(0) = x \end{cases}$$ possui uma única solução $y(t) = e^{tA}x$.

Demonstração Seja $y(t) = e^{tA}x$. Pela definição do e^{tA}: $e^{0A} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{0\cdot\lambda}(\lambda - A)^{-1}d\lambda = I \Rightarrow$

$y(0) = x \underset{\text{Lema 3}}{\Rightarrow} y(t)$ é solução de (7).

Supondo que $\omega: [0,\infty) \to E$ também é solução de (7).

Considere $g(t) = e^{-tA}\omega(t)$, $t \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}g(t) = e^{-tA}(-A)\omega(t) + e^{-tA}A\omega(t) = 0, \quad t > 0.$$

Seja $y^* \in E^* \Rightarrow \langle g(t), y^* \rangle_{E \times E^*} : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ é contínua e $\frac{d}{dt}\left(\langle g(t), y^* \rangle\right) = 0$, $t > 0 \Rightarrow$

$\langle g(t), y^* \rangle = \text{const}$, $t \geq 0 \Rightarrow$

$\langle e^{-tA}\omega(t), y^* \rangle = \langle \underbrace{x}_{g(0)}, y^* \rangle \Rightarrow$ Já que y^* é arbitrário, $e^{-tA}\omega(t) = x \Rightarrow \omega(t) = e^{tA}x$

Observando que $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ (mostre isso usando a definição da e^{tA}), obtemos $\omega(t) = e^{tA}x$, $t \geq 0$.

Def 3 A solução $y(t)$ de $y'(t) = Ay(t)$ é dita __assintoticamente estável__ se $y(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Se todas soluções de $y'(t) = Ay(t)$ são assintoticamente estáveis $\Rightarrow$ a equação $y'(t) = Ay(t)$ é dita __assintoticamente estável__.

Teorema 4 Se $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda < 0\} = \mathbb{C}_\ell^-$ $\Rightarrow$ $y'(t) = Ay(t)$ é assint. estável. Reciprocamente se $y'(t) = Ay(t)$ for assintoticamente estável $\Rightarrow$ $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0\} = \overline{\mathbb{C}_\ell^-}$. Se, adicionalmente, E for de dimensão finita $\Rightarrow$

$$\left[y'(t) = Ay(t) \text{ é assint. est.} \Leftrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{C}_\ell^- \right].$$

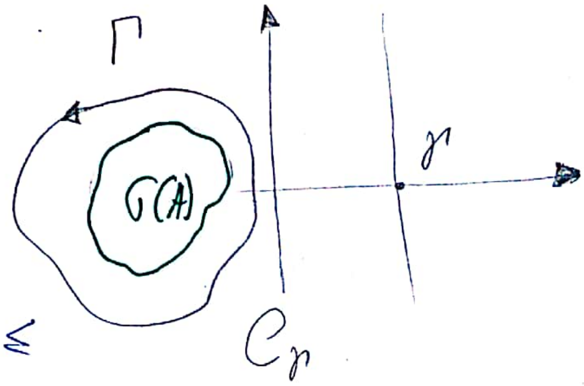
A demonstração do Teorema 4 usa o seguinte

Lema 4

Se $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda < \gamma\} = \mathbb{C}_\gamma$ $\Rightarrow$ $\exists$ constante $C = C(A,\gamma)$ tal que $\|e^{tA}\| \leq Ce^{\gamma t}$, $t \geq 0$ (8)

Reciprocamente, de (8) segue que $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{C}_\gamma}$ (ou seja $\mathrm{Re}\,\lambda \leq \gamma$).

Demonstração • Suponha que $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_\gamma$ $\Rightarrow$ podemos escolher uma curva Γ simples, fechada, positivamente orient. tal que $\sigma(A) \subset \mathrm{int}(\Gamma)$ e $\Gamma \subset \mathbb{C}_\gamma$. Observe que $|e^{t\lambda}| \leq e^{t\gamma}$ para $\lambda \in \Gamma$ e $t \geq 0$. $\Rightarrow$



$$\|e^{tA}\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_\Gamma e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\| \leq$$

$$\leq \left(\frac{|\Gamma|}{2\pi} \sup_{\lambda \in \Gamma} \|(\lambda - A)^{-1}\| \right) e^{\gamma t}, \; t \geq 0$$ que prova (8).

• Suponha que (8) vale $\Rightarrow$ $\sigma(e^{tA}) \subseteq \overline{B}_{Ce^{\gamma t}}(0)$, $t \geq 0$

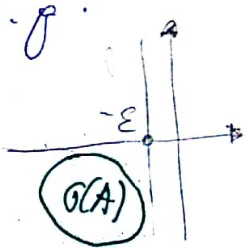
(usei o fato que $\sigma(T) \subseteq \overline{B}_{\|T\|}(0)$)

Agora, já que $e^{t\sigma(A)} = \sigma(e^{At})$ (Teorema do mapeamento espectral), obtemos $e^{t\mathrm{Re}\lambda} = |e^{\lambda t}| \le C e^{\gamma t}$, $\lambda \in \sigma(A)$, $t \ge 0$.

$\Rightarrow$ para $\lambda_0 \in \sigma(A)$ temos $e^{t(\mathrm{Re}\lambda_0 - \gamma)} \le C$, $\underline{t \ge 0}$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\lambda_0 - \gamma \le 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\lambda_0 \le \gamma \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{C}_\gamma$.

<u>Demonstração</u> do <u>Teorema</u> 4 • Assume que $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_e^-$. Como $\sigma(A)$ é compacto, $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_{-\varepsilon}$ $\Rightarrow$ por Lema 4:



$$\|e^{tA}\| \le C e^{-\varepsilon t}, \ t \ge 0 \Rightarrow$$

$\forall x \in E$: $e^{tA}x \to 0$ (já que $\|e^{tA}x\| \le Ce^{-\varepsilon t}\|x\| \to 0$)

$\Rightarrow y'(t) = Ay(t)$ é assint. estável. (lembre que cada solução tem forma $e^{tA}x$)

• Suponha que $y'(t) = Ay(t)$ é assint-te estável. Seja $x \in E \Rightarrow e^{tA}x \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists C_x > 0$ tal que $\|e^{tA}x\| \le C_x < \infty$ $\forall t \ge 0$. Aplicando o princípio de limitação uniforme $\exists C > 0$ tal que $\|e^{tA}\| \le C$, $t \ge 0$

Agora, por Lema 4 $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{C}_e^-} = \mathbb{C}_0$

• Assume que $\dim E < \infty$ e $y'(t) = Ay(t)$ é assint. estável. Já sabemos que $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{C}_e^-}$. Suponha que $\exists \lambda_0$ com $\mathrm{Re}\lambda_0 = 0$ e $\lambda_0 \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda_0 = ib$, $b \in \mathbb{R}$.

Já que $\dim E < \infty$, λ_0 é autovalor de A. Suponha que x_0 é autovetor corresp. $\Rightarrow e^{tA}x_0 = e^{itb}x_0$

Portanto $\|x_0\| = \|e^{itb}x_0\| = \|e^{tA}x_0\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow x_0 = 0$ (absurdo)

$\Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{C}_e^-$. $\left(e^{tA}x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (ib)^j x_0 = e^{itb} x_0\right)$